11-мысал. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}},(\alpha \geq 0)$ қатарының жинақты болу-болмауын зерттеңіз.

Шешімі: $f(x)=\frac{1}{x^{\alpha}}$, $x \geq 1$,

$$\int_{1}^{\infty} f(x)dx = \lim_{B\to\infty}\int_{1}^{B}\frac{dx}{x^{\alpha}} = \lim_{B\to\infty}\frac{1}{1-\alpha}x^{1-\alpha}\Big|_{1}^{B} = \lim_{B\to\infty}\frac{1}{1-\alpha}\left(B^{1-\alpha}-1\right) = \frac{1}{1-\alpha},$$

егер α – 1 > 0, демек α > 1 болғанда қатар жинақталады (1-мысал).

§6. Ауыспалы таңбалы қатарлар

Кез келген көрші мүшелерінің таңбалары қарама-қарсы болып келетін қатарды ***ауыспалы таңбалы қатар*** дейміз. Мұндай қатарды әдетте мүшелерінің таңбасын көрсетіп

$$a_1 - a_2 + a_3 - ... + (-1)^{n+1} a_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} a_n \qquad (3.17)$$

түрінде жазады. Ауыспалы таңбалы қатардың жинақтылығын төмендегі сөйлем тағайындайды.

Лейбниц теоремасы. Егер ауыспалы таңбалы (3.17) қатары мүшелерінің абсолют шамалары монотонды кемімелі $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq .... \geq a_{n-1} \geq a_n ...$ тізбегін құрып, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ болса, онда мұндай қатар жинақты болады.

Дәлелдеме. Ауыспалы таңбалы қатардың ішінара S_{2n} қосындысын

$$S_{2n} = a_1 - a_2 + ... + a_{2n-1} - a_{2n} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + ... + (a_{2n-1} - a_{2n})$$

түрінде жазуымызға болады.

Әрбір жақша оң болғандықтан, n – нің өсуінде S_{2n} – нің де өсетінін байқаймыз. Енді S_{2n} – ді басқаша

$$S_{2n} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - ... - (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n}$$

түрінде кескіндейтін болсақ, S_{2n} қосындысы жоғарыдан $a_1 \geq 0$ санымен шектелетінін көреміз. Сондықтан $n \to \infty$ болғанда, S_{2n} – нің шегі бар екені және ол S – ке тең болатыны шығады:

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n} = S \qquad (3.18)$$

Әрі қарай $S_{2n} = S_{2n+1} - a_{2n}$ болуынан $S_{2n+1} = S_{2n} + a_{2n}$. Сонда

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n+1} = \lim_{n\to\infty}(S_{2n} + a_{2n}) = \lim_{n\to\infty} S_{2n} + \lim_{n\to\infty} a_{2n} = S \qquad (3.19)$$

Олай болса (3.18) және (3.19)-дан $\lim_{n\to\infty} S_{2n} = \lim_{n\to\infty} S_{2n+1} = S$. Демек қатарымыз жинақталған болады.

§7. Абсолютті және шартты жинақталу

Қатарлар жинақталуының жеткілікті шарты (Даламбер белгісі) мүшелері оң қатарларға қатысты тұжырымдалған. Мүшелері теріс қатарлар үшін де мұндай қасиет сақталады. Енді мүшелерінің бір бөлігі оң, бір бөлігі теріс немесе нөлге тең қатарларды қарастырамыз. Мұндай қатарлар ***айнымалы таңбалы қатарлар*** деп аталады.

Теорема 3.9. Айнымалы таңбалы.

$$a_1 + a_2 + ... + a_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad (3.20)$$

қатары үшін оның модульдерінен жасалған

$$| a_1 | + | a_2 | + ... + | a_n | + ... = \sum_{n=1}^{\infty} | a_n | \qquad (3.21)$$

қатары жинақталған болса, онда берілген қатардың өзі де жинақталған болады.

Дәлелдеме. Қосалқы

$$\left(a_1 + |a_1|\right) + \left(a_2 + |a_2|\right) + ... + \left(a_n + |a_n|\right) + ... = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n + |a_n|\right) \qquad (3.22)$$

қатарын қарастырайық.

$$0 \le a_n + |a_n| \le 2|a_n| \qquad (n = 1, 2, ...) \qquad (3.23)$$

және (3.21) қатарының жинақты болуынан, қатарларды салыстыру белгісі негізінде (3.22) қатары да жинақты болып шығады. Алайда (3.20) қатары жинақталатын қатарлардың түріндегі

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n + |a_n|\right) - \sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$$

айырымын кескіндейді, олай болса өзі де жинақталған болады.

Теорема дәлелденді.

Ескерту. Кері пікір дұрыс емес. Атап айтқанда, егер берілген қатар жинақталған болса, онда оның мүшелерінің модульдерінен жасалған қатар жинақты болуға міндетті емес. Сонымен, жинақталатын қатарлардың барлығын екі топқа бөлуге болады.

Бірінші топқа кіретін жинақталатын қатарларға олардың модульдерінен жасалған қатар жинақты болатындай қатарларды жатқызуға болады. Мұндай жинақталатын қатарлар ***абсолютты жинақталатын қатарлар*** деп аталады.

Екінші топқа кіретін жинақталатын қатарларға, олардың модульдерінен жасалған қатар жинақты болмайтындай қатарларды жатқызуға болады. Мұндай жинақталатын қатарлар ***шартты жинақталатын қатарлар*** деп аталады.

3.4-анықтама. Берілген қатармен бірге оның мүшелерінің модульдерінен жасалған қатар жинақты болса, берілген қатар ***абсолютты жинақталған қатар*** деп аталады.

Берілген қатар жинақты болып, ал оның мүшелерінің модульдерінен жасалған қатар жинақты болмаса, берілген қатарды ***шартты жинақталатын қатар*** дейді. Мәселен, жинақталатын

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{1}{32} + \ldots.$$

қатары абсолютты жинақталатын қатар болып табылады, өйткені оның модульдерінен жасалған

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \ldots.$$

түріндегі қатар да жинақты болып келеді. (Осы қатарлардың екеуі де, еселігі $-\frac{1}{2}$ және $\frac{1}{2}$-ге тең геометриялық прогрессиялар).

Ал, керісінше

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+.....$$

қатары Лейбниц теоремасының шартына сәйкес, жинақталған болуына қарамастан абсолютты жинақталмайды, өйткені оның мүшелерінің модульдерінен жасалған

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+... \qquad (3.24)$$

қатары жинақталмайды (гармоникалық қатар). Расында осы қатардың $a_n=\frac{1}{n}$ жалпы мүшесі $n\to\infty$-да нөлге ұмтылғанымен, қатардың өзі жинақталмайтынын көрсетейік. Ол үшін алғашқы 2^m мүшелерінің S_{2^m} ішінара қосындысын алып, оның мүшелерін төмендегідей етіп топтастырайық:

$$S_{2^m}=1+\frac{1}{2}+\underbrace{\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)}_{2}+\underbrace{\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)}_{2^2}+$$

$$+\underbrace{\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\frac{1}{14}+\frac{1}{15}+\frac{1}{16}\right)}_{2^3}+\ldots+$$

$$+\ldots+\underbrace{\left(\frac{1}{2^{m-1}+1}+\frac{1}{2^{m-1}+2}+...+\frac{1}{2^m}\right)}_{2^{m-1}}.$$

Төменгі теңсіздіктер орынды:

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}>\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2},\ \frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}>\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+...+\frac{1}{16}>\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}=\frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{2^{m-1}+1}+\frac{1}{2^{m-1}+2}+\ldots+\frac{1}{2^m}>\underbrace{\frac{1}{2^m}+\frac{1}{2^m}+\ldots+\frac{1}{2^m}}_{2^{m-1}}=\frac{2^{m-1}}{2_m}=\frac{1}{2}.$$

Сонымен, әр жақшада тұрған мүшелер қосындысы $\frac{1}{2}$ ден артық. Алғашқы екі мүшені есептемегенде, жақшалардың жалпы саны $m-1$-ге тең болғандықтан, онда

$$S_{2^m}>1+\frac{2}{m}.$$

Егер S_{2^m} қосындысында $n=2^m$-ге тең мүшелер саны шексіз ұлғайса, онда m көрсеткіші де шексіз өседі. Сондықтан $S_{2^m}\to\infty$, демек гармоникалық қатар болып табылатын (3.24) қатары жинақталмайды.

§8. Қатардың абсолютті жинақталуының белгісі

Қандай да бір

$$a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}a_n \tag{3.25}$$

қатары үшін $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n+1}{a_n}\right|=l$ шарты орындалып,

1) $l<1$ болса, онда берілген (3.25) қатары абсолютті жинақталады.

2) $l>1$ болса, онда (3.25) қатары жинақталмайды.

Расында, жазылған шартымыз

$$|a_1|+|a_2|+\ldots+|a_n|+\ldots \tag{3.26}$$

қатарына қолданылған Даламбер белгісінің дәл өзі. Бұдан егер $l<1$ болса, онда (3.25) және (3.26) қатарларының екеуі де жинақталатыны, демек (3.25) қатары абсолютті жинақталатыны туындайды. Егер де $l>1$ болса, онда Даламбер белгісіне жасалған ескерту бойынша $n\to\infty$-да $|a_n|$ нөлге ұмтылмайды. Бұл жағдайда (3.25) және (3.26) қатарларының екеуі де жинақталмайды.